Eigene Aufgabe zu Parallelprojektionen

Beim Erstellen von Animationsfilmen werden heutzutage die Szenen nicht mehr gezeichnet, wie es früher bei Cartoons der Fall war. Stattdessen wird eine Szene im 3-Dimensionalen Raum erstellt, in der sich der Ersteller der Animation frei bewegen kann und die Szene animiert. Außerdem wird eine virtuelle Kamera im Raum platziert, die einen bestimmten Blickwinkel hat. Der Vorgang, der die Sicht der Kamera auf die 3-Dimensionale Szene in ein 2-Dimensionales Bild umwandelt, nennt sich "Rendern".
(Einsatz von GeoGebra zur räumlichen Orientierung, Datei ist als "RenderSzene.ggb" mitgegeben)

a) In der Szene befindet sich ein Objekt, dessen Eckpunkte durch die folgenden Punkte beschrieben werden:
$A(-3/6/2)$
$B(-2/7{,}73/2)$
$C(-3{,}73/8{,}73/2)$
$D(-4{,}73/7/2)$
$E(-3/6/4)$
$F(-2/7{,}73/4)$
$G(-3{,}73/8{,}73/4)$
$H(-4{,}73/7/4)$
$I(-2/7{,}73/8)$
$K(-3/6/8)$
Die Kamera befindet sich am Punkt $P(-4|14|5)$. Der Blickwinkel der Kamera auf die Szene wird durch den Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Zeichne das Objekt, sowie die Kamera mit ihrem Blickwinkel in ein geeignetes Koordinatensystem.

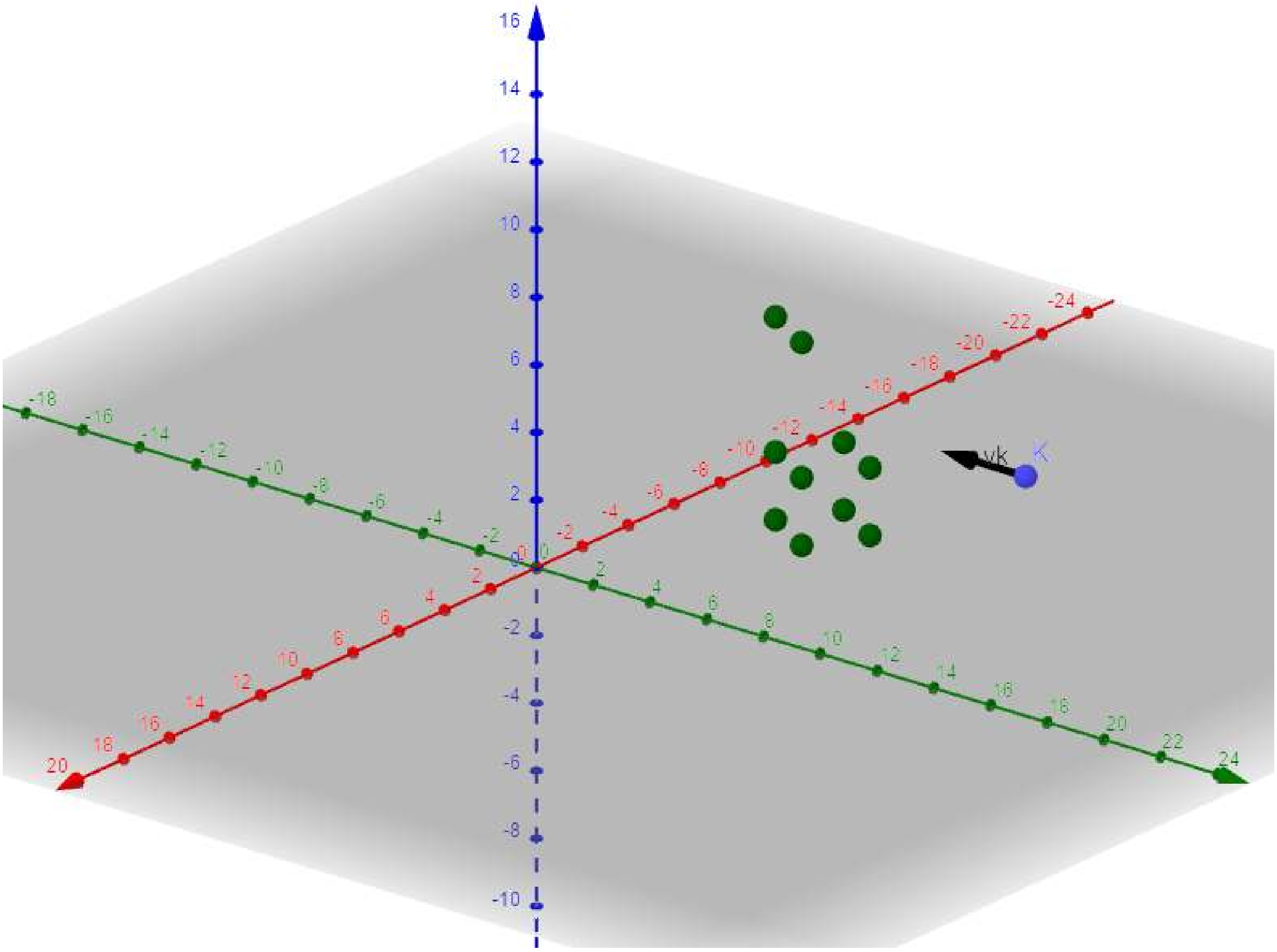
b) Um eine Szene zu rendern, wird diese auf eine Ebene projiziert, die senrkecht zum Blickwinkel der Kamera steht. Finde eine geeignete Koordinatenebene, an der die Szene gerendert werden kann und berechne die Bildpunkte des Objektes.

c) In dem obigen Beispiel ist die Kamera der Einfachheit halber schon senkrecht zu einer Koordinatenebene ausgerichtet. Nun befindet sich die Kamera am Punkt $P(-8|16|10)$, der Blickwinkel ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Finde eine Ebene, die senkecht zu dem neuen Blickwinkel der Kamera steht und berechne die Bildpunkte auf der Ebene.
Ansatz/Tipp: Die Ebene, die senkrecht zu der Kamera steht, wird eingespannt von zwei Vektoren, $\overrightarrow{v_x}$ und $\overrightarrow{v_y}$. Liegt die dazwischen aufgespannte Ebene senkrecht zum Kamerablickwinkel, sind auch die Vektoren senkrecht zum Kamerablickwinkel. Jeder Punkt, der auf der Ebene liegt, kann durch eine Linearkombination der beiden Vektoren dargestellt werden.

d) Die Bildpunkte des Objektes befinden sich jetzt zwar auf einer Ebene, aber diese Ebene liegt trotzdem im 3-Dimensionalen Raum, die Koordinaten der Bildpunkte bestehen also immer noch aus 3 Komponenten. Durch zwei gezielte Drehungen um Koordinatenachsen lässt sich die Ebene auf eine Koordinatenebene legen, wodurch die Koordinaten der Bildpunkte eine Dimension verlieren, also ein 2-Dimensionales Bild darstellen.
Bestimme die Koordinaten der Bildpunkte auf einer 2-Dimensionalen Ebene.

Lösung zu der Aufgabe

a)



b) Die x1x2-Ebene liegt senkrecht zum Blickwinkel der Kamera, weshalb sie die geeignete Ebene ist, auf die das Objekt gerendert wird. Die sich aus dem Blickwinkel der Kamera (=Projektionsvektor) ergebende Abbildungsmatrix ist somit:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergeben sich folgende Punkte für das auf die x1x3-Ebene gerenderte Objekt:

$A(-3/0/2)$
$B(-2/0/2)$
$C(-3{,}73/0/2)$
$D(-4{,}73/0/2)$
$E(-3/0/4)$
$F(-2/0/4)$
$G(-3{,}73/0/4)$
$H(-4{,}73/0/4)$
$I(-2/0/8)$
$K(-3/0/8)$

c) Für $\overrightarrow{v_x}$ und $\overrightarrow{v_y}$ gilt: $\overrightarrow{v_x} * \overrightarrow{v_2} = 0$ und $\overrightarrow{v_y} * \overrightarrow{v_2} = 0$
Beide Vektoren dürfen außerdem nicht kollinear zueinander sein, damit sie eine Ebene ausspannen. Der Einfachheit halber liegt einer der Vektoren auf der x1x2-Ebene, der andere darf also nicht auf der Ebene liegen. Findet man also Lösungen für die oben angegebenen Gleichungen für die Vektoren $\overrightarrow{v_x}$ und $\overrightarrow{v_y}$ hat man zwei Vektoren, die die Renderebene definieren. Die sich ergebenden Gleichungen lassen sich nicht eindeutig lösen. Auf das Ergebnis bin ich durch Logik und Raten gekommen.

Die Ebene senkrecht zu dem Kamerawinkel wird eingespannt von $\overrightarrow{v_x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für den Bildpunkt von A gilt folgende Gleichung:

$$\overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{v_z} = \overrightarrow{OA'}$$

Der Bildpunkt von A soll auf der Ebene $\overrightarrow{v_x}, \overrightarrow{v_y}$ liegen, lässt sich also als eine Linearkombination der beiden Vektoren darstellen:

$$\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{v_z} = r\overrightarrow{v_x} + s\overrightarrow{v_y}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das sich ergebende Gleichungssystem wird mit dem GTR gelöst:

$$r = -\frac{49}{430} \quad s = \frac{61}{430} \quad t = \frac{45}{43}$$

Mit t bzw. r und s lässt sich der Bildpunkt bestimmen:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{v_z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{45}{43}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1395 \\ 0{,}7674 \\ -1{,}1395 \end{pmatrix}$$

Da man nicht für jeden Punkt ein LGS lösen will, kann man das LGS für einen allgemeinen Punkt aufstellen und auflösen. Dabei genügt es, nach t aufzulösen, da man nur t benötigt, um den Bildpunkt eindeutig zu bestimmen.

$$\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{v_z} = \overrightarrow{OP'} = r \cdot \overrightarrow{v_x} \cdot s \cdot \overrightarrow{v_y}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5r + 5s - 3t &= p_1 \\ -3r + 3s + 5t &= p_2 \\ 10r \qquad\quad + 3t &= p_3 \quad | \mathrm{III} + \tfrac{10}{3}\mathrm{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5r + 5s - 3t &= p_1 \\ -3r + 3s + 5t &= p_2 \quad | \mathrm{II} + \tfrac{3}{5}\mathrm{I} \\ 10s + 19\tfrac{2}{3}t &= p_3 + \tfrac{10}{3}p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5r + 5s - 3t &= p_1 \\ 6s + \tfrac{16}{5}t &= p_2 + \tfrac{3}{5}p_1 \\ 10s + 19\tfrac{2}{3}t &= p_3 + \tfrac{10}{3}p_2 \quad | \mathrm{III} - \tfrac{10}{6}\mathrm{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5r + 5s - 3t &= p_1 \\ 6s + \tfrac{16}{5}t &= p_2 + \tfrac{3}{5}p_1 \\ 14\tfrac{1}{3}t &= p_3 + \tfrac{10}{3}p_2 - \tfrac{10}{6}p_2 - p_1 \end{aligned}$$

$$\frac{43}{3}t = p_3 + \frac{10}{6}p_2 - p_1$$

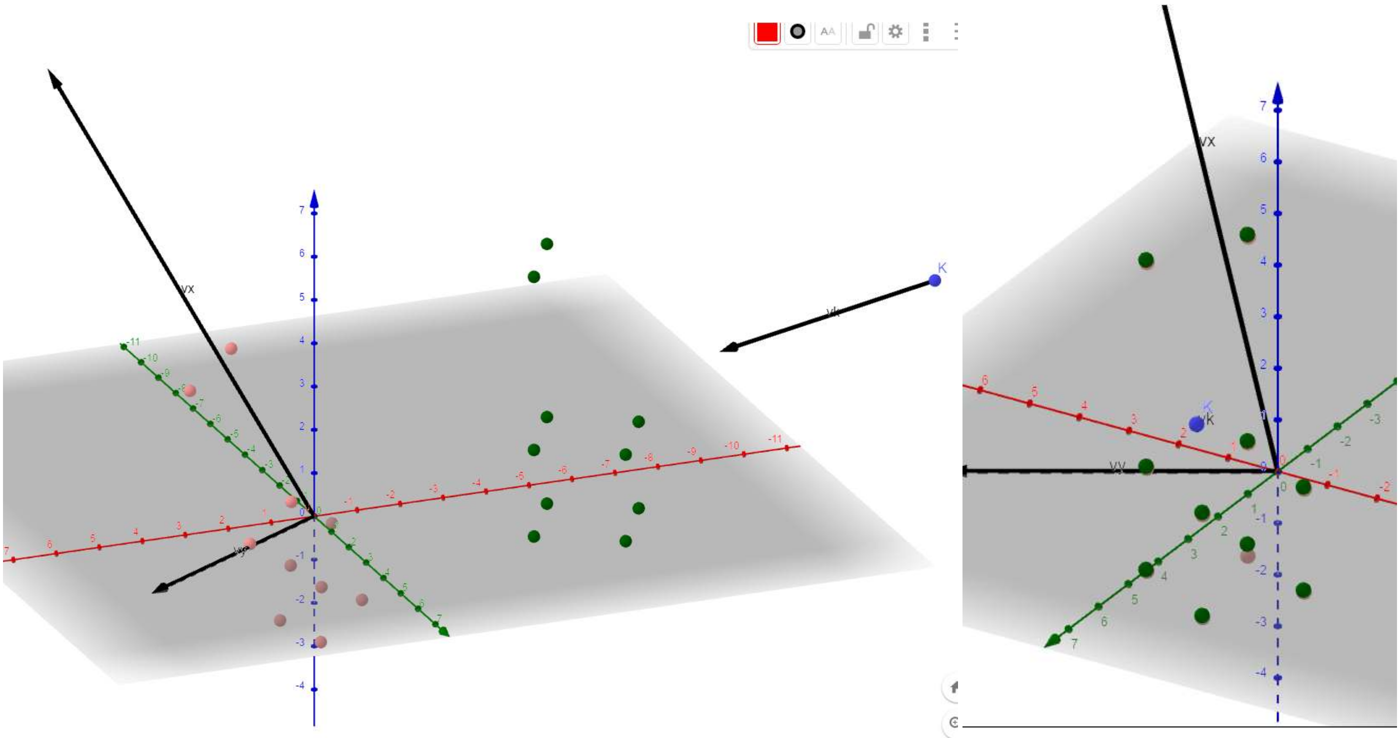
$$t = \frac{3}{43}\left(p_3 + \frac{10}{6}p_2 - p_1\right)$$

Somit ist der allgemeine Bildpunkt $P'(p'_1/p'_2/p'_3)$ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$OP' = \vec{OP} + t \cdot \vec{v_k} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \frac{3}{43}\left(p_3 + \frac{10}{6}p_2 - p_1\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich alle Bildpunkte des Objektes auf der Renderebene berechnen:

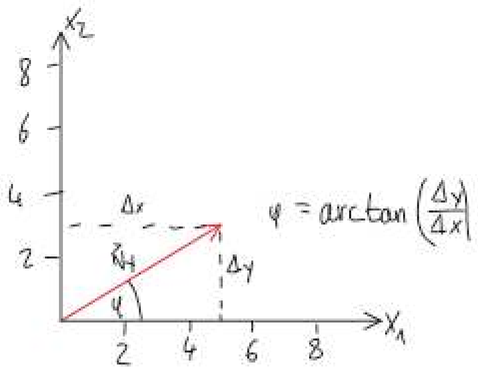
$A'(0{,}1395/0{,}7674/-1{,}1395)$
$B'(1{,}5337/1{,}8405/-1{,}5337)$
$C'(0{,}5147/1{,}6556/-2{,}2447)$
$D'(-0{,}8795/0{,}5826/-1{,}8505)$
$E'(0{,}5581/0{,}0698/0{,}4419)$
$F'(1{,}9524/1{,}1428/0{,}0477)$
$G'(0{,}9333/0{,}9579/-0{,}6633)$
$H'(-0{,}4609/-0{,}1151/-0{,}2691)$
$I'(2{,}7895/-0{,}2526/3{,}2105)$
$K'(1{,}3953/-1{,}3256/3{,}6047)$



Links: Die Bildpunkte (rot) liegen alle auf der Renderebene, rechts: Aus der Perspektive der Kamera sind die Bildpunkte und das eigentliche Objekt deckungsgleich.

d) Zunächst soll die Renderebene auf die x1-Achse ausgerichtet werden durch eine Drehung um die x3-Achse. Dazu verwenden wir den Vektor, der auf der x1x2-Achse liegt, also $\overrightarrow{v_y}$. Der Winkel zwischen $\overrightarrow{v_y}$ und der x1-Achse gibt den Drehwinkel in Richtung des Uhrzeigersinns an. Der Drehwinkel gegen den Uhrzeigersinn ergibt sich aus $360° - \varphi$. Die Steigung des Vektors in der x1x2-Ebene lässt sich aus $\frac{v_{y2}}{v_{x1}}$ berechnen. Somit gilt für den Drehwinkel:

$$\varphi = 360° - \arctan\left(\frac{v_{y2}}{v_{x1}}\right) = 360° - \arctan\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= 360° - 31° = 329°$$

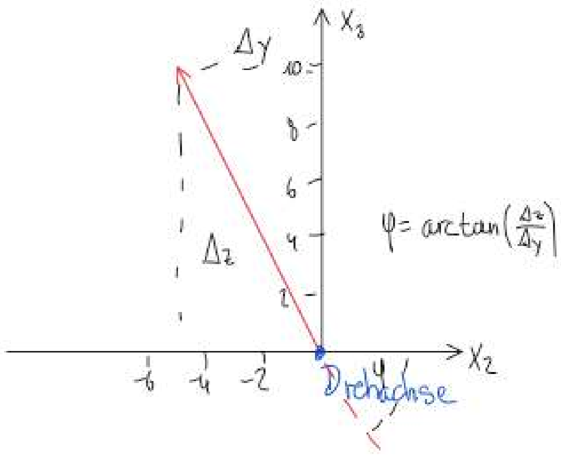


Als Drehmatrix, um die Ebene auf der x1-Achse auszurichten ergibt sich somit:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(329°) & -\sin(329°) & 0 \\ \sin(329°) & \cos(329°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix muss auf den Vektor $\overrightarrow{v_x}$ angewendet werden, damit der neue Vektor genutzt werden kann, um die Renderebene auf die x1x2-Ebene zu legen. Da die Renderebene bereits auf die x1-Achse ausgerichtet ist, können wir um die x1-Achse drehen. Diesmal nehmen wie den neuen Vektor $\overrightarrow{v_x}$, um den Winkel zwischen der Renderebene und der x2-Achse zu bestimmen.

$$A * \overrightarrow{v_x} = \begin{pmatrix} 2{,}77 \\ -5{,}13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

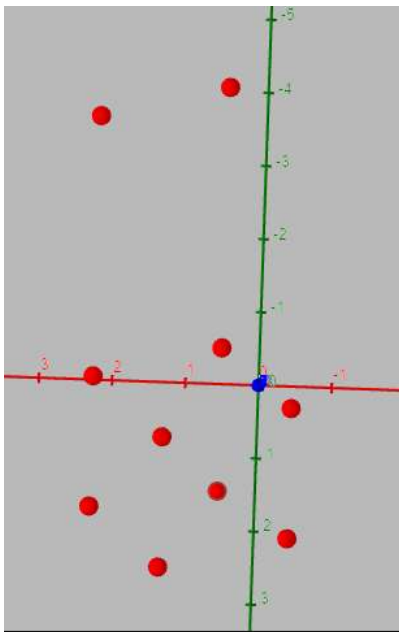


$$\varphi = 360° - \arctan\left(\frac{10}{-5{,}13}\right) = 422°$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(422°) & -\sin(422°) \\ 0 & \sin(422°) & \cos(422°) \end{pmatrix}$$

Um die nun die Bildpunkte des Objektes auf der Renderebene in die x1x2-Ebene zu legen, muss jeder punkt zunächst mit A, dann mit B multipliziert werden:

$A'(-0{,}51/-1{,}46/0)$
$B'(-2{,}26/-1{,}73/0)$
$C'(-1{,}29/-2{,}53/0)$
$D'(0{,}46/2{,}08/0)$
$E'(-0{,}52/0{,}49/0)$
$F'(-2{,}26/0{,}05/0)$
$G'(-1{,}29/-0{,}75/0)$
$H'(0{,}46/-0{,}3/)$
$I'(-2{,}27/3{,}61/0)$
$K'(-0{,}52/4{,}06/0)$



Die Bildpunkte des gerenderten Objektes auf der x1x2-Ebene